引文格式:张丽丹,钟振,杨珍.不规则形状小天体重力位的蒙特卡洛估算方法及其应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(7):1395-1403.DOI:10.13203/j.whugis20240415

Citation:ZHANG Lidan,ZHONG Zhen,YANG Zhen.Monte Carlo Estimation of Gravity Potential for Irregularly Shaped Small Bodies and Its Applications[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(7):1395-1403.DOI:10.13203/j.whugis20240415

不规则形状小天体重力位的蒙特卡洛估算方法及其应用

张丽丹[1] 钟 振[1] 杨 珍[1]

1 贵州师范大学物理与电子科学学院,贵州 贵阳,550025

摘 要:随着小行星探测任务不断推进,不规则外表形状对重力位估算的影响较大,常用的多面体算法复杂度较高,不利于算法设计。针对不规则外表形状小天体重力位估算的问题,提出蒙特卡洛积分的重力位算法,以降低重力位估算的复杂度,促进相关理论研究和工程任务的开展。结果表明,蒙特卡洛算法与多面体算法在模型重力位估算中具有良好的一致性,所提算法具有一定的合理性。球谐算法在重力位估算方面具有极高的计算效率,但因数据转换和有限外表形状数据无法准确表征小天体形状而产生不可避免的偏差,该算法不太适合于不规则形状小天体重力位的估算;Phobos和彗星67P重力位估算结果进一步显示蒙特卡洛算法与多面体算法具有较好的一致性,再次表明蒙特卡洛算法具有一定的合理性,其因极大地降低重力位估算的复杂度更具适用性。将蒙特卡洛算法应用于Psyche重力位估算,发现Psyche赤道和两极地区的重力异常存在明显的带状分布。Psyche重力异常分布的差异性表明,类似小天体的扁率摄动可能是环绕探测器轨道确定的重要因素,类似小天体的着陆采样任务在极区开展有助于降低燃料消耗。鉴于蒙特卡洛算法的良好表现及低复杂度,可广泛应用于不规则形状小天体重力异常估算,为类似理论研究和工程应用提供一定的参考。

关键词:小天体;不规则形状;重力位;蒙特卡洛积分;小行星Psyche

中图分类号:P223 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-04-27

DOI:10.13203/j.whugis20240415 **文章编号**:1671-8860(2026)07-1395-09

Monte Carlo Estimation of Gravity Potential for Irregularly Shaped Small Bodies and Its Applications

ZHANG Lidan[1] *ZHONG Zhen*[1] *YANG Zhen*[1]

1 School of Physics and Electronic Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: **Objectives**: The irregular geometry of small celestial bodies significantly affects gravity potential estimation. However, the commonly used polyhedral model (PM) suffers from high computational complexity, which limits its application to theoretical research and engineering practice. **Methods**: To address this issue, a gravity potential estimation method based on Monte Carlo (MC) integration is proposed for irregularly shaped small celestial bodies. The proposed method aims to reduce computational complexity while maintaining estimation accuracy. **Results**: The proposed MC method shows good agreement with the PM in gravity potential estimation, demonstrating its effectiveness. In contrast, although the spherical harmonic method is computationally efficient, it is less suitable for irregularly shaped small celestial bodies because data transformation and the limited capability of spherical harmonic expansion to represent irregular geometries inevitably introduce estimation errors. The gravity potential estimation results for Phobos and Comet 67P further demonstrate the reliability of the proposed method. Compared with the PM, the MC method substantially reduces computational complexity while maintaining comparable estimation accuracy. Applica-

基金项目:国家自然科学基金(42030110,42364001)。

第一作者:张丽丹,硕士,研究方向为岩石质小天体内部结构与重力位。ldzhang1563@gznu.edu.cn

通信作者:钟振,博士,教授。zzhong@gznu.edu.cn

tion of the proposed method to Psyche reveals a distinct zonal distribution of gravity anomalies between the equatorial and polar regions. The results indicate that oblateness-induced perturbations may significantly affect the orbit determination of orbiting spacecraft. In addition, conducting landing and sampling missions in the polar regions of similar small celestial bodies may help reduce fuel consumption. **Conclusions**: The proposed MC method provides reliable gravity potential estimation with low computational complexity and is well suited for gravity potential and gravity anomaly estimation of irregularly shaped small celestial bodies. It provides technical support for related theoretical research and future exploration missions.

Key words: small celestial body; irregular shape; gravity potential estimation; Monte Carlo integration; asteroid Psyche

太阳系除了8大行星和矮行星外,还有大量小天体,包括小行星、彗星和流星体等。不同于达到流体静力学平衡状态的行星和矮行星,小天体由于缺乏足够的质量,自身引力不足以产生足够的压力来克服内部压强,无法达到流体静力学平衡状态而呈现出不规则的外表面[1],从而形成复杂的重力位分布。重力位是探测天体内部结构分布的关键手段,特别是用于探测天体内部的质量分布,该方法在地球和固态行星研究中得到了广泛应用[2-3]。小天体外部重力位可以通过探测器轨道跟踪数据反演得到,受限于探测器轨道覆盖范围,该方法通常仅能确定低阶重力位系数[4]。随着深空探测技术的发展,以小行星为探测目标的深空探测计划已经从主带小行星延伸至遥远的柯伊伯带小行星[5-6]。近年来,随着小行星探测任务不断增加,小行星外部重力位常用于探测器抵近探测的轨道设计。通过高精度的射电测量数据获取飞掠小天体探测器的轨道信息,可以反演目标天体的精确重力位分布,该方法能够获取高精度重力场信息,但观测成本较高,使用范围具有一定的局限性[7-8],特别是当目标天体缺少环绕探测器激光测高数据时。另一种快速估算方法是利用小天体不规则外部形状正演其外部重力位,尽管该方法依赖于小天体的内部密度分布,但该方法估算的重力位可以作为小天体外部重力位的初始值[9-10]。早期由于光变曲线技术的局限性,基于光变曲线反演的小天体形状模型的精度较低。随着深空技术的发展,通过大量光变曲线观测数据反演小天体外部形状模型得到了广泛应用[11],尤其是在缺乏实地在轨探测数据的情况下,基于小行星光变曲线构建不规则外部形状模型,可以进一步正演小行星的外部重力位分布。

基于小天体外部形状估算重力位的方法较多,其中三轴椭球体模型曾用于小行星重力位的估算,该方法将小行星外表面近似成理想的三轴椭球体模型,在理论上不仅能得到目标天体的重力位分布,还能得到目标天体绕主轴旋转时的动力学规律[12],但该方法估算的重力位对于外表面变化幅度较大的小天体而言可能产生较大的误差,这在一定程度上限制了该方法的广泛应用。第二种方法是球谐分析法,该方法是将小天体外表面的重力位展开成一系列球谐函数的形式,依据球谐函数展开系数可以方便地进行波谱分析,特别是当小天体外表面形状也按球谐函数进行展开时,可以方便地进行重力地形的相关谱和导纳谱分析,进而推测小天体内部结构特征等[13]。球谐分析法是描述固态行星重力场的一种常用方法,这是由于行星达到了流体静力学平衡条件,其外表形状总体上可以近似成球体,而球谐函数恰好是圆球表面上的正交基函数,可以很方便地表征球体近似天体外部空间的重力位及外部形状[13-14]。但是大多数小天体因未达到流体静力学平衡条件,外部形状变化幅度较大,难以用球体进行近似,以致球谐分析法表征外部重力位时会产生较大的误差,不适用于非球体近似的小天体。为了解决该问题,文献[15-16]引入了椭球谐函数来表征非球体近似小天体的外部重力位,研究表明椭球谐函数产生的误差明显低于球谐函数,但该方法仅适用于近似椭球形状的小天体,对于外表面形状严重不规则的天体,其建模难度非常大。另一种方法是将小天体近似为一系列质量浓度点,依据这些质量点的位置和大小计算重力位[17]。该方法计算效率较高,容易与观测数据进行拟合,但仅适用于重力位精度要求不高的情况,且质量点的选择方式对结果的影响较大,普通人员很难掌握并熟练地使用该方法。

针对复杂形状小行星或彗星重力估算的复杂边界值问题,文献[18]基于重力向量场与流体速度场的等效原理,提出了一种从质量、动量和能量守恒定律导出边界条件的方法,依据流体力学方法来估算不规则小天体重力位分布。该方

法能够避免传统算法复杂边界发散的问题,但这种重力位估算方法较为复杂,估算程序因复杂度较高而不容易实现。最后一种估算不规则外表面小天体重力位的方法是多面体模型法,其原理是将小天体不规则外表面近似为一系列三角平面组成的多面体[19]。对于顶点在小天体中心,而底面位于外表面的任意四面体,理论研究表明四面体小天体外部空间任意点的重力位可转换成四面体底面的环路积分。该方法能够估算任意形状小天体的表面重力位,既适用于密度均匀分布的小天体,也适用于密度非均匀分布的小天体。因此在实际使用中的应用范围较广,但该方法需要严格限定环路积分方向,计算复杂度非常大,编程不容易实现[16]。当需要得到更加精确的外部重力位时,需要将小天体外表面划分成较为密集的三角平面,这在一定程度上又增加了计算时间,降低了重力位的估算效率。中国已于2025年开展了小行星探测任务,发射天问二号探测器对近地小行星2016HO3进行着陆采样[20-21]。美国于2017年提出了Psyche任务,并于2023年发射了相应的探测器,旨在对M类小行星Psyche进行探测[22-23]。当前,小行星探测任务发展迅速,常见重力位估算方法计算复杂度较高,不利于工程实现和相关研究,且有关这些常见估算方法的差异性研究较少。为此,本文提出一种不规则形状小天体重力位的简易估算方法,并与常见重力估算算法进行比较分析,以期为小天体探测相关的重力位估算提供参考。

1　重力位的球谐算法

对于质量为M、平均半径为R的天体,对外部空间目标位置(r,Θ,Φ)的重力位U,控制方程为拉普拉斯方程,满足如下形式:

$$\Delta U=0 \tag{1}$$

式中,Δ表示拉普拉斯算符。式(1)的解为球谐函数,其形式为[24]:

$$U=\frac{GM}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l}\sum_{m=0}^{l}\left(\bar{C}_{lm}\cos(m\theta)+\bar{S}_{lm}\sin(m\theta)\right)\bar{P}_{lm}\left(\sin\phi\right) \tag{2}$$

式中,r表示小天体中心至目标位置的距离;G表示万有引力常数;θ和ϕ分别表示天体表面位置的经度和纬度;$\bar{P}_{lm}$表示l阶m次规格化的连带勒让德函数;$\bar{C}_{lm}$和$\bar{S}_{lm}$表示规格化的l阶m次球谐函数展开系数。由于球谐函数是球面上的正交基函数,小天体表面地形可以映射成平均半径为R的球面上的高程分布$H(\theta,\phi)$,可以类似展开成球谐函数的形式:

$$H(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(h_{1,lm}\cos(m\theta)+h_{2,lm}\sin(m\theta)\right)P_{lm}\left(\sin\phi\right) \tag{3}$$

式中,$h_{1,lm}$和$h_{2,lm}$表示地形的球谐展开系数。对于密度为$\Delta\rho$的表面地形,可以根据地形球谐系数求得该地形对空间目标位置(r,Θ,Φ)重力位的球谐展开系数为[25]:

$$\bar{C}_{lm}=\frac{4\pi\Delta\rho R^{3}}{M(2l+1)}\sum_{n=1}^{l+3}\frac{{}^{n}h_{1,lm}}{R^{n}n!}\frac{\prod_{j=1}^{n}(l+4-j)}{l+3} \tag{4}$$

$$\bar{S}_{lm}=\frac{4\pi\Delta\rho R^{3}}{M(2l+1)}\sum_{n=1}^{l+3}\frac{{}^{n}h_{2,lm}}{R^{n}n!}\frac{\prod_{j=1}^{n}(l+4-j)}{l+3} \tag{5}$$

依据式(2)~(5),可得不规则小天体对目标位置(r,Θ,Φ)的重力位为:

$$U=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{l_{\max}}\left(\frac{R}{r}\right)^{l}\sum_{m=0}^{l}\left(\bar{C}_{lm}\cos(m\theta)+\bar{S}_{lm}\sin(m\theta)\right)\bar{P}_{lm}\left(\sin\phi\right)\right] \tag{6}$$

式中,$\bar{C}_{lm}$和$\bar{S}_{lm}$由式(4)、式(5)估算;$l_{\max}$表示表面地形球谐展开的最大阶数。

2　重力位的多面体估算方法和蒙特卡洛算法

根据牛顿万有引力定律,对于质量为M,体积为V的小天体,其外部空间的重力位U可表示为[26]:

$$U=G\iiint_{M}r^{-1}\,\mathrm{d}m=G\iiint_{V}\frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V \tag{7}$$

式中,ρ为小天体的密度;$\mathrm{d}m$为质量微元;r为天体外部空间特定位置与$\mathrm{d}m$的距离。为了提升计算效率,式(7)可以根据高斯散度定理进行降维处理,式(7)的三重积分可以转换成小天体外表面的面积分:

$$U=\frac{1}{2}G\rho\iint_{S}\hat{\boldsymbol{n}}_{f}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\sigma \tag{8}$$

式中,S表示小天体的外表面积;$\mathrm{d}\sigma$表示积分微元面积;$\hat{\boldsymbol{n}}_{f}$表示小天体外表面三角面元的外法线单位矢量(由小天体内部指向天体外部的单位矢

量);$\hat{\boldsymbol{r}}$表示重力位估算点到微元dσ的单位矢量。由于小天体外表面由一系列三角面元组成,在实际计算中,式(8)可以转换成所有三角面元积分之和:

$$U=\frac{1}{2}G\rho\iint_{S}\hat{\boldsymbol{n}}_f\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\hat{\boldsymbol{n}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

式中,i表示外表面三角面元的编号;N表示小天体外表面的三角面元总数;S_i表示面元i的面积。式(9)在计算时,为了降低复杂度,可以将坐标转换至面元坐标系中,该坐标系以三角面元外法线$\hat{\boldsymbol{n}}_i$为Z轴,以面元所在平面为(X,O,Y)平面,那么该面元内任意点均有相同的值$\Delta z_i=\hat{\boldsymbol{n}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{r}}$,则式(9)可为:

$$U=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\hat{\boldsymbol{n}}_i\cdot\left(\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}\right)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\hat{\boldsymbol{n}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\iint_{S_i}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r}=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i\iint_{S_i}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r} \tag{10}$$

式中,$\vec{\boldsymbol{r}}$表示重力位估算点至三角面元i上任意点的位置矢量;r表示该位置矢量的大小。为了进一步降低计算复杂度,可依据格林定理进行降维处理,将式(10)的二重面积分转换为围绕三角面元边界的环路积分[19,27]:

$$U=\frac{1}{2}G\rho\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_i\hat{\boldsymbol{n}}_j\cdot\vec{\boldsymbol{r}}_jL_j-\sum_{i=1}^{N}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_i\hat{\boldsymbol{n}}_j\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\omega_i\right) \tag{11}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{n}}_j$表示三角面元边的法向单位矢量;$\vec{\boldsymbol{r}}_j$表示重力位估算点到三角面元某边固定点的矢量;L_j为三角面元某边的势能;w_i是从重力位估算点到平面的符号立体角。L_j和w_i有如下形式:

$$L_j=\ln\frac{r_a+r_b-e_{ab}}{r_a+r_b-e_{ab}} \tag{12}$$

$$\omega_i=2\arctan\frac{\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{r}_b\times\boldsymbol{r}_c}{r_ar_br_c+r_a(\boldsymbol{r}_b\cdot\boldsymbol{r}_c)+r_b(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{r}_a)+r_c(\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{r}_b)} \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{r}_a$、$\boldsymbol{r}_b$和$\boldsymbol{r}_c$分别表示重力位估算点至三角面元3个顶点(a、b、c)的位置矢量;r_a、r_b、r_c分别表示3个矢量的大小;e_{ab}表示三角面元顶点a和顶点b之间的距离;依据式(11)~(13),可以估算出任意形状小天体的外部重力位,特别是组成小天体外表面形状的三角面元越多,多面体算法估算的重力位越准确,反映出的表面重力特征越详细。

作为随机模拟的蒙特卡洛算法是当前广泛应用的一种数值算法[28-29],它以概率统计理论为基础,基于随机抽样对诸如定积分的数学问题进行处理[30-33]。该方法自提出后在理论研究和工业生产中得到了广泛应用,特别是随着计算机科学技术的发展,该方法对处理高复杂度问题具有明显的优势[32-33],比如使用该方法处理传统定积分不但能降低复杂度,还可以根据实际需求灵活地调整积分精度等。对于连续曲线$y=f(x)$,在区间$[a,b]$上的定积分I可以采用蒙特卡洛算法进行估算。若在区间$[a,b]$内随机产生均匀分布的抽样样本为x_n,其中$n=1,2,\cdots,N$,每一个样本点的函数值为$f(x_n)$,则连续曲线$f(x)$在所有样本点的平均值为:

$$f(x)=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}f(x_n) \tag{14}$$

依据积分中值定理,可得连续曲线$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分I具有如下形式:

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(x)=\frac{b-a}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n) \tag{15}$$

为了获得较高的精度,只需增大式(15)的样本点数N的值。依据式(11)估算天体外部特定位置的重力位,需要考虑三角面元的面法向量方向以及3个边的法向量方向,还需计算式(12)和式(13),且式(13)的分母不能为零,程序设计较为繁琐。依据蒙特卡洛算法,利用式(15)对式(10)直接进行积分,可以降低式(11)中重力位估算的复杂度。式(15)中积分核函数为$f(x)$,类似地,可得式(10)的积分核函数为$f(x)=1/r$,基于蒙特卡洛算法的式(10)可以表示为:

$$U=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i\iint_{S_i}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r}=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i\frac{A_i}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}\frac{1}{r_n} \tag{16}$$

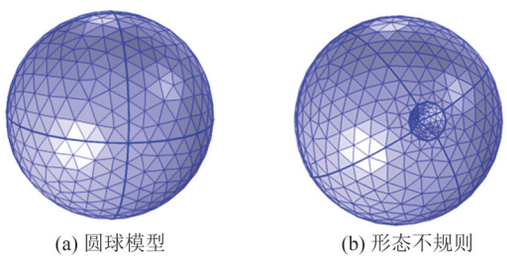
式中,A_i和N_i分别表示第i个三角面元的面积及该面元的抽样点总数;n表示当前三角面元第n个抽样点的序号;r_n表示重力位估算点至第i个三角面元第n个抽样点的距离。类似地,依据式(16)可得相应的径向重力加速度g_r为:

$$g_r=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i\iint_{S_i}\frac{\mathrm{d}\sigma}{r^2}=\frac{1}{2}G\rho\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i\frac{A_i}{N_i}\sum_{n=1}^{N_i}\frac{1}{r_n^2} \tag{17}$$

3 重力位估算的比较与分析

为了测试和比较球谐算法、多面体算法和蒙特卡洛算法,图1给出了模型小天体及其表层三角网格分布。图1(a)表示圆球模型(圆球半径为10 km),图1(b)表示图1(a)中圆球模型的不规则形态,去除

的圆锥底面半径为 1.875 km,高为 3 km。为了方便处理,本文假设图 1(a)和图 1(b)所示模型具有相同的质量 $1.060\,261\times10^{16}$ kg。图 1(a)的平均密度为 $2.532\,5\times10^{3}$ kg/m^3。图 1(b)去除了部分锥体,密度较图 1(a)的圆球模型稍大,为 $2.536\,4\times10^{3}$ kg/m^3。由式(7)可知,图 1(a)圆球模型 13 km 处的标准重力位大小为 54.420 668 815 m^2/s^2。3 种算法的结果分布如图 2 所示。不同算法的重力位分布存在差异,图 2(a)~2(c)与标准重力位的偏差分别为 3.8×10^{-6} m^2/s^2、2.27×10^{-3} m^2/s^{2}和 2.69×10^{-4} m^2/s^2,表明球谐算法的精度最高,本文蒙特卡洛算法次之,多面体算法低于前两种算法,但它们在分米级别的精度仍然具有一致性,表明本文提出的重力位蒙特卡洛算法具有可行性。为了进一步测试如图 1(b)所示不规则形状天体的重力位,图 3 给出了 3 种不同算法的重力位在 10 分位上存在的差别。



(a) 圆球模型　　(b) 形态不规则

图 1　模型天体示意图

Fig. 1　Diagram of Model Celestial Body

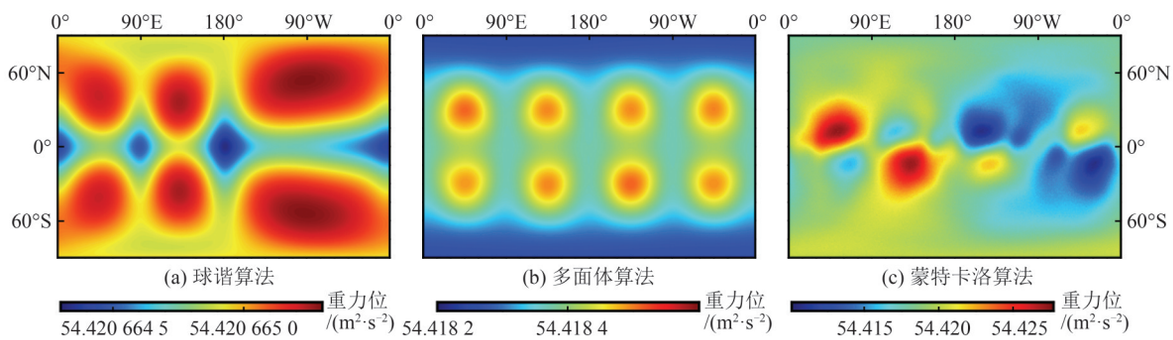


图 2　半径为 10 km 的圆球模型 13 km 处重力位分布图

Fig. 2　Gravity Potential Distribution of a Spherical Model with a Radius of 10 km at a Distance of 13 km

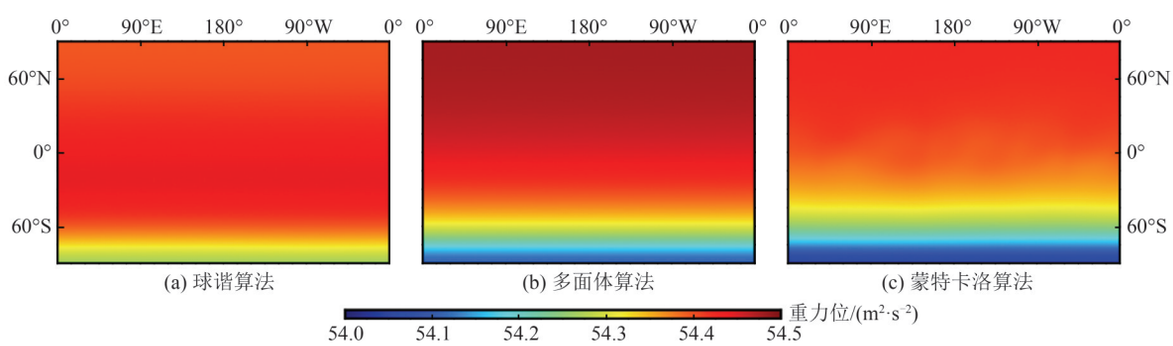


图 3　不规则圆球模型半径 13 km 处重力位分布图

Fig. 3　Gravity Potential Distribution of the Irregular Spherical Model at a Radial Distance of 13 km

球谐算法在南极的重力位为 54.27 m^2/s^2,多面体算法在南极圆锥凹陷处的重力位为 54.11 m^2/s^2,蒙特卡洛算法在相应位置的重力位为 54.07 m^2/s^2。可以发现,本文提出的蒙特卡洛算法与多面体算法的偏差最小,球谐算法与多面体算法的偏差最大。这可能与格网加密程度有关,即使南极圆锥型凹陷地形格网最大化地加密,但其他区域的格网较稀疏,地形转换成球谐模型时,南极凹陷地形的格网会因其他区域较稀疏的格网而被平滑稀疏化,最终使得地形球谐模型表征的南极地形特征不够精确,以致相应的重力位球谐算法无法得到精度较高的结果。鉴于当前小行星和彗星形状数据均由点云数据组成的三角格网进行表示,如果使用球谐算法来估算重力位,会因三角格网至规则经纬度格网转换而产生一定偏差,以致估算的重力位精度下降。另外,小行星和彗星外表形状的不规则特征较明显,当三角格网至规则经纬度格网转换时,局部位置的加密格网会因其他位置的稀疏格网而稀疏化,进而出现不规则圆球模型局部位置重力位估算精度下降的问题。

为了进一步测试 3 种算法的差异,图 4 给出了 3 种算法估算的 Phobos 重力位分布。Phobos

的外表形状具有明显的不规则性[34],特别是Phobos表面直径达9.5 km的Stickney撞击盆地,使得Phobos表面不但严重地偏离球形,而且还严重地偏离椭球体模型[35]。为了得到球谐算法估算的重力位,本文先将Phobos高分辨率形状数据抽样得到经纬度均匀分布的格网数据,然后利用式(3)得到Phobos外表形状表征的球谐展开形式,最后取平均密度为1846 kg/m^3,并应用式(4)~(6)估算Phobos外部空间半径为13 km球面的重力位。球谐算法与多面体算法、蒙特卡洛算法存在明显的差别,而多面体算法和蒙特卡洛算法较为相似,表明球谐算法对不规则外表形状Phobos重力位的估算存在偏差,这种偏差一方面来自非均匀点云数据与经纬度均匀分布格网数据的转换,另一方面与Phobos不规则外表形状相对球体模型的严重偏离有关。图4表明,不规则外表形状小天体重力位的估算直接依据点云数据使用多面体算法和蒙特卡洛算法较为适宜。若进一步考虑算法的复杂度及可实现程度,蒙特卡洛算法较多面体算法更为简洁、更容易实现,在不规则外表形状小天体重力位估算中具有一定的优势。

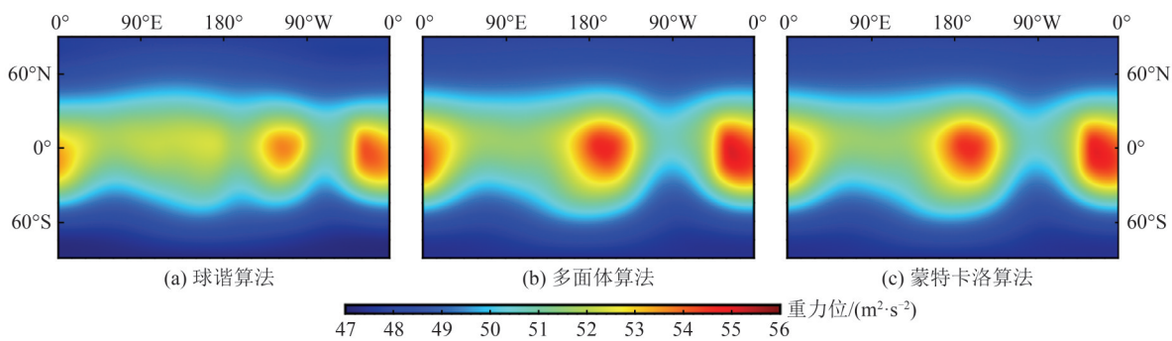


图4 Phobos半径13 km处重力位分布图

Fig. 4 Gravity Potential Distribution of Phobos at a Radial Distance of 13 km

4 彗星67P与小行星Psyche重力位估算

彗星67P是一颗比较知名的周期性彗星,自欧洲Rosetta探测成功着陆之后,利用任务期间的影像数据产生了众多形状数据模型,近期最新形状模型由文献[36]提供。彗星67P的形状分布如图5(a)所示,可以发现中心区域凹陷而两端明显凸起,表明该彗星早期很可能由两个独立的彗星撞击演化形成[37],以致两端仍然保留了早期彗星的彗核。基于彗星67P的形状模型,图5(d)给出了彗星中心至表面距离的地理投影分布,其中红色区域反映了该彗星的双核结构特征。考虑该彗星双核结构导致的复杂形貌,图5(b)和图5(e)给出了该彗星距离中心5 km球面的重力位分布。依据文献[37]的研究,重力位估算中取彗星67P的平均密度为533 kg/m^3。图5(b)和图5(e)表明两种算法得到的重力位几乎完全一致,表明本文提出的蒙特卡洛算法具有一定的合理性,可应用于实际非规则形状小天体的重力位估算。为了进一步显示彗星67P表面重力位的细节特征,图5(c)和图5(f)给出了距离彗星表面0.05 m处的重力位分布。选择距离表面0.05 m处重力位的估算主要基于两个方面的考虑:(1)本文涉及的所有重力位算法只适用天体外部重力位估算。(2)较大的距离可能因复杂形貌致使估算点包含在天体内部,以致重力位估算发散,研究表明距离表面0.05 m的重力位不会出现发散现象。图5(c)和图5(f)表明除白色区域略有差异外,两种算法得到的重力位分布几乎一致,其中白色区域表示重力位估算值超过色标给出的最大值0.47 m^2/s^2。图5表明蒙特卡洛算法具有一定的合理性,可应用于不规则形状小天体重力位及重力加速度的估算。为此,本文进一步给出了美国小行星探测目标Psyche的重力位和重力异常分布。

Pysche是主带小行星里富含金属且体形比较显著的M类小行星,由太阳系形成初期岩石质行星因多次剧烈撞击侥幸逃逸而保留至今,可能包含了太阳系形成初期岩石质行星核的形成历史,对丰富太阳系形成初期行星的形成过程至关重要。美国已于2023年成功发射Psyche探测器,预计于2029年抵达Psyche,并开展相关科学探测任务[22]。受太阳系形成初期密集撞击事件的作用,Psyche表面遍布了大量陨石撞击坑,呈现明显的不规则外表形状,鉴于当前观测数据的限制,以光变曲线构建Psyche表面形状的分辨率有

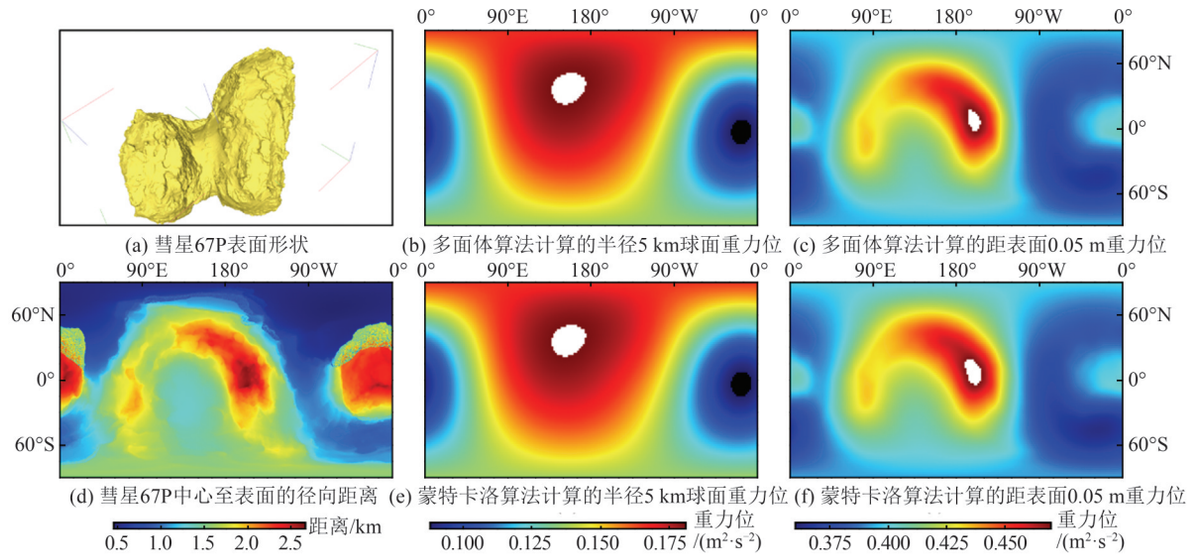


图 5　彗星 67P 形状模型及重力位分布图

Fig. 5　Shape Model and Gravity Potential Distribution of Comet 67P

限[38]。依据文献[38]提供的 Psyche 最新外表形状数据及平均半径 111 km,图 6(a)给出了 Psyche 相对平均半径 111 km 球面的高程分布。可以发现,赤道附近呈现出正高程(最大高程甚至接近 30 km),而两极呈现出负高程(最小值甚至接近 −22 km),表明 Psyche 的扁率较大,相应的重力位二阶项对探测器的扁率摄动占主导因素,在探测器具体环绕任务中需要重点考虑扁率摄动对探测器轨道根数的影响。依据文献[38]提供的 Psyche 引力常数 $GM=1.601\ \mathrm{km^3/s^2}$,图 6(b)给出了距离 Psyche 表面 1 m 处的重力位分布。类似地,可估算出 Psyche 参考球面(取平均半径时的球面)的重力加速度值 $g_0=GM/R^2\approx12.994$ Gal ($1\ \mathrm{Gal}=1\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$),依据式(17)估算的表面重力加速度与 g_0 作差,可以得到 Psyche 的表面重力异常如图 6(c)所示。由图 6 可以看出,重力位及重力异常与表面地形高程呈现出正相关,即表面高程越大,表面重力位和重力异常越大,高程越小的地方重力位和重力异常也越小。图 6(c)表明,Psyche 除赤道附近少数位置的加速度接近标准值外(图中白色位置表示相应的重力异常大于色标最大值 −1 Gal 的情况),在两极的重力加速度明显小于标准值 g_0。鉴于极区与赤道附近重力异常的差异性,类似小天体着陆任务在极区开展有助于降低燃料消耗。另外,图 6(c)中重力异常在赤道附近呈现出点带条状分布,这与 Psyche 当前地形模型分辨率较差有关,表明 Psyche 的地形数据还有较大的提升空间。在 Psyche 的后续探测任务中,利用探测器近距离环绕测绘仍然非常重要,这样有利于构建高分辨率的地形模型,也有利于通过轨道距离数据反演 Psyche 的精确重力异常分布。

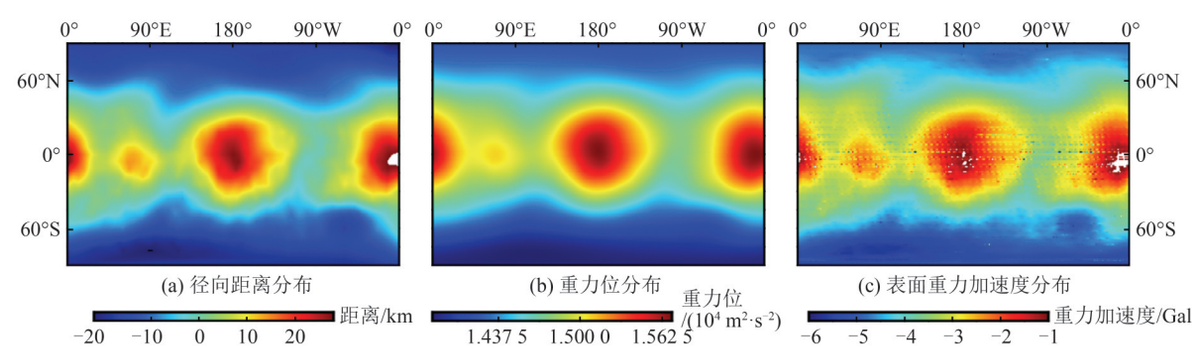


图 6　小行星 Psyche 形貌特征及重力场分布图

Fig. 6　Topographic Characteristics and Gravity Field Distribution of Asteroid Psyche

5　结　语

常用重力位估算算法计算复杂度较高,不利于不规则形状小天体重力位的快速估算。针对该问题,本文提出了一种蒙特卡洛算法,并与球谐算法和多面体算法进行了对比分析。研究结

果表明:

1)球谐算法虽然具有较高的计算效率,但并不适用于不规则形状小天体的重力位估算。一方面,当前小天体外部形状主要采用点云三角网模型进行表征,在形状模型向球谐系数转换过程中不可避免地产生误差。另一方面,不规则小天体表面形态严重偏离球体,有限阶球谐展开难以准确描述其复杂几何特征。

2)理论模型以及Phobos、彗星67P等典型不规则小天体的重力位估算结果均表明,本文提出的蒙特卡洛算法与多面体算法具有良好的一致性,验证了算法的有效性和可靠性。同时,该算法显著降低了重力位估算的计算复杂度,更适用于不规则形状小天体重力位和重力加速度的快速估算。

3)将本文算法应用于小行星Psyche的重力场分析发现,其重力异常呈现明显的带状分布。重力异常的空间差异表明,类似小天体的扁率摄动可能对探测器轨道确定产生较大影响,而重力异常较小的极区更有利于开展着陆采样与返回任务,可有效降低任务实施过程中的能源消耗。

参 考 文 献

[1] 曾祥远,温童歌,李姿雯. 小天体着陆动力学研究进展[J]. 中国科学(技术科学),2024(5):761-785.
ZENG Xiangyuan, WEN Tongge, LI Ziwen. Recent Development of Landing Dynamics over Small Celestial Bodies[J]. *Scientia Sinica* (*Technologica*), 2024(5): 761-785.

[2] IZQUIERDO K, LEKIĆ V, MONTÉSI L G J. A Bayesian Approach to Infer Interior Mass Anomalies from the Gravity Data of Celestial Bodies[J]. *Geophysical Journal International*, 2020, 220(3): 1687-1699.

[3] PARK R S, KONOPLIV A S, BILLS B G, et al. A Partially Differentiated Interior for (1) Ceres Deduced from Its Gravity Field and Shape[J]. *Nature*, 2016, 537(7621): 515-517.

[4] SANCHEZ J C, SCHAUB H. Simultaneous Navigation and Mascon Gravity Estimation Around Small Bodies[J]. *Acta Astronautica*, 2023, 213: 725-740.

[5] SPENCER J R, STERN S A, MOORE J M, et al. The Geology and Geophysics of Kuiper Belt Object (486958) Arrokoth[PP/OL]. V1. arXiv (2020-04-01)[2024-04-02]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.00727.

[6] BOTTKE W F, VOKROUHLICKÝ D, MARSCHALL R, et al. The Collisional Evolution of the Primordial Kuiper Belt, Its Destabilized Population, and the Trojan Asteroids[J]. *The Planetary Science Journal*, 2023, 4(9): 168.

[7] KONOPLIV A S, PARK R S, VAUGHAN A T, et al. The Ceres Gravity Field, Spin Pole, Rotation Period and Orbit from the Dawn Radiometric Tracking and Optical Data[J]. *Icarus*, 2018, 299: 411-429.

[8] KONOPLIV A S, ASMAR S W, PARK R S, et al. The Vesta Gravity Field, Spin Pole and Rotation Period, Landmark Positions, and Ephemeris from the Dawn Tracking and Optical Data[J]. *Icarus*, 2014, 240: 103-117.

[9] WU L Y, CHEN L W, WU B, et al. Improved Fourier Modeling of Gravity Fields Caused by Polyhedral Bodies: With Applications to Asteroid Bennu and Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(10): 1963-1984.

[10] 郭茜,鄢建国,杨轩,等. 利用形状模型进行火卫一高阶重力场建模[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2020,45(4):604-611.
GUO Xi, YAN Jianguo, YANG Xuan, et al. High Degree Phobos Gravity Field Modeling Based on Shape Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(4): 604-611.

[11] RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ J, DÍEZ ALONSO E, IGLESIAS ÁLVAREZ S, et al. Light-Curve Analysis and Shape Models of NEAs 7335, 7822, 154244, and 159402[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2024, 533(4): 4160-4187.

[12] MERLINE W J, WEIDENSCHILLING S J, DURDA D D, et al. Asteroids Do Have Satellites[M]//BOTTKE W F Jr, CELLINO A, PAOLICCHI P, et al. Asteroids III. Tucson: University of Arizona Press, 2002: 289-312.

[13] KAULA W M. Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy[M]. New York: Dover Publications, 2000.

[14] 罗志才,晁定波,宁津生. 重力梯度张量的球谐分析[J]. 武汉测绘科技大学学报,1997(4):346-349.
LUO Zhicai, CHAO Dingbo, NING Jinsheng. Spherical Harmonic Analysis on Gravity Gradient Tensor[J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1997(4): 346-349.

[15] ROMAIN G, JEAN-PIERRE B. Ellipsoidal Harmonic Expansions of the Gravitational Potential: Theory and Application[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2001, 79(4): 235-275.

[16] REIMOND S, BAUR O. Spheroidal and Ellipsoidal Harmonic Expansions of the Gravitational Poten-

tial of Small Solar System Bodies. Case Study: Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko[J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2016, 121(3): 497-515.

[17] PARK R S, WERNER R A, BHASKARAN S. Estimating Small-Body Gravity Field from Shape Model and Navigation Data[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 212-221.

[18] YIN Z, SNEEUW N. Modeling the Gravitational Field by Using CFD Techniques[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(6): 68.

[19] WERNER R A, SCHEERES D J. Exterior Gravitation of a Polyhedron Derived and Compared with Harmonic and Mascon Gravitation Representations of Asteroid 4769 Castalia[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1996, 65(3): 313-344.

[20] 李春来, 刘建军, 任鑫, 等. "天问二号"任务科学目标和有效载荷配置[J]. 深空探测学报(中英文), 2024, 11(3): 304-310.
LI Chunlai, LIU Jianjun, REN Xin, et al. Scientific Objectives and Payloads Configuration of the Tianwen-2 Mission[J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2024, 11(3): 304-310.

[21] 刘山洪, 吴正楷, 黄皓, 等. 基于地基观测数据的2016HO3历表重建与精度分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2025, 50(7): 1304-1310.
LIU Shanhong, WU Zhengkai, HUANG Hao, et al. Reconstruction and Accuracy Analysis of 2016HO3 Ephemeris Based on Ground Observations[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(7): 1304-1310.

[22] DIBB S D, ASPHAUG E, BELL J F, et al. A Post-Launch Summary of the Science of NASA's Psyche Mission[J]. *AGU Advances*, 2024, 5(2): e2023AV001077.

[23] BOWMAN C D D, ELKINS-TANTON L T, TALAMANTE A, et al. Mission to Psyche: Including Undergraduates and the Public on the Journey to a Metal World[J]. *Space Science Reviews*, 2023, 219(3): 25.

[24] HOFMANN-WELLENHOF B, MORITZ H. Physical Geodesy[M]. 2nd ed. Vienna: Springer Vienna, 2006.

[25] WIECZOREK M A, PHILLIPS R J. Potential Anomalies on a Sphere: Applications to the Thickness of the Lunar Crust[J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 1998, 103(E1): 1715-1724.

[26] HERRERA-SUCARRAT E, PALMER P L, ROBERTS R M. Modeling the Gravitational Potential of a Nonspherical Asteroid[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(3): 790-798.

[27] SHI X, WILLNER K, OBERST J, et al. Working Models for the Gravitational Field of Phobos[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2012, 55(2): 358-364.

[28] ULAM S M. Adventures of a Mathematician[M]. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2019.

[29] ZIO E. Monte Carlo Simulation: The Method[M]. London: Springer, 2013.

[30] BINDER K, CEPERLEY D M, HANSEN J P, et al. Monte Carlo Methods in Statistical Physics[M]. Berlin: Springer, 2012.

[31] KALOS M H, WHITLOCK P A. Monte Carlo Methods[M]. Weinheim: Wiley, 2008.

[32] GEWEKE J. Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration[J]. *Econometrica*, 1989, 57(6): 1317.

[33] KONG A, MCCULLAGH P, MENG X L, et al. A Theory of Statistical Models for Monte Carlo Integration[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 2003, 65(3): 585-604.

[34] WILLNER K, SHI X, OBERST J. Phobos' Shape and Topography Models[J]. *Planetary and Space Science*, 2014, 102: 51-59.

[35] BRUCK SYAL M, ROVNY J, OWEN J M, et al. Excavating Stickney Crater at Phobos[J]. *Geophysical Research Letters*, 2016, 43(20): 10.

[36] CHEN M, HUANG X F, YAN J G, et al. A New Shape Model of the Bilobate Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko[J]. *Icarus*, 2023, 401: 115566.

[37] VINCENT J B, BODEWITS D, BESSE S, et al. Large Heterogeneities in Comet 67P as Revealed by Active Pits from Sinkhole Collapse[J]. *Nature*, 2015, 523(7558): 63-66.

[38] FARNOCCHIA D, FUENTES-MUÑOZ O, PARK R S, et al. Mass, Density, and Radius of Asteroid (16) Psyche from High-Precision Astrometry[J]. *The Astronomical Journal*, 2024, 168(1): 21.